

LOGARITHMES

& EXPONENTIELLES



Classification Thèmes de MegaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Existe-t'il 2 entiers naturels a et b tels que

$$a^b = b^a \quad ?$$

Trouvez-les tous.

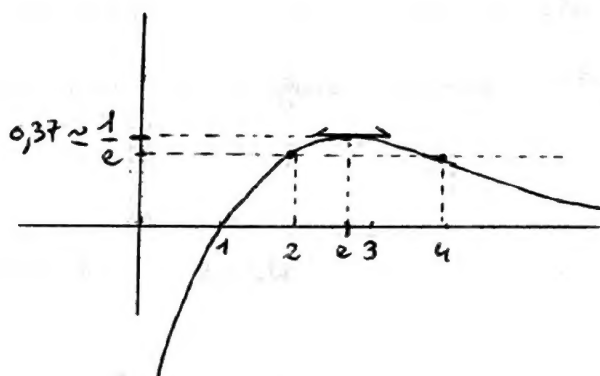
Si $a = b$, l'égalité est vérifiée. Supposons maintenant $a \neq b$.

$$a^b = b^a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

Étudions la fonction $f(x) \doteq \frac{\ln x}{x}$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \text{et :}$$

x	0	e	$+\infty$
f'		+	0 -
f		$-\infty \rightarrow \frac{1}{e} \approx 0,37 \rightarrow 0_+$	



Le graphique montre que $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, ne sera possible que si a (ou b) égale 2.

On résout ensuite l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$.

1^{re} solution : on constate que $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$, et l'étude des variations de f prouve que

$$f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } 4$$

2^e solution : si on ne le voit pas, on étudie $\varphi(x) \doteq 2 \ln x - x \ln 2$.

$$\varphi'(x) = \frac{2 - \ln 2 \cdot x}{x} \quad \text{donc}$$

	0	$\frac{2}{\ln 2} \approx 2,8$	
φ'		+	0 -
φ		$-\infty \nearrow \approx 0,12 \searrow -\infty$	

et l'on essaie d'encadrer la racine de $\varphi(x) = 0$ telle que $x > \frac{2}{\ln 2}$. On tombe alors sur 4 tel que $\varphi(4) = 0$.

Loi du rayonnement stellaire :

Obj.: • Étude d'une fct. dérivée de e^x
 • Calcul d'int. par int. par parties
 • Appl. à l'astrophysique.

L'intensité d'une radiation provenant d'une étoile est fonction de la température T (en $^{\circ}\text{K}$) et de la longueur d'onde λ du rayonnement (ie de sa couleur) :

$$I_{\lambda} = \frac{a}{\lambda^5} e^{-\frac{b}{\lambda T}} \quad a, b \text{ constantes positives (Loi de Planck)}$$

a) Soit T une température donnée. L'intensité I_{λ} est maximale pour une longueur d'onde λ_m . Établir la relation :

$$\lambda_m T = c \quad (\text{loi de Wien}) \quad (\text{où } c \text{ est une cte})$$

b) L'énergie totale E émise par seconde par une surface unitaire d'étoile est $E = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda \doteq \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0_+}} \int_{\varepsilon}^A I_{\lambda} d\lambda$

Montrer que $E = d \cdot T^4$ (loi de Stefan) où $d = \text{cte}$.

Pour cela, on pourra :

* Poser $J_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{k}}}{x^n} dx$ (où $k > 0$) et montrer que $J_n = \frac{n-2}{k} J_{n-1}$ pour $n \geq 3$ en utilisant une intégration par parties.

* En déduire J_5 , puis E .

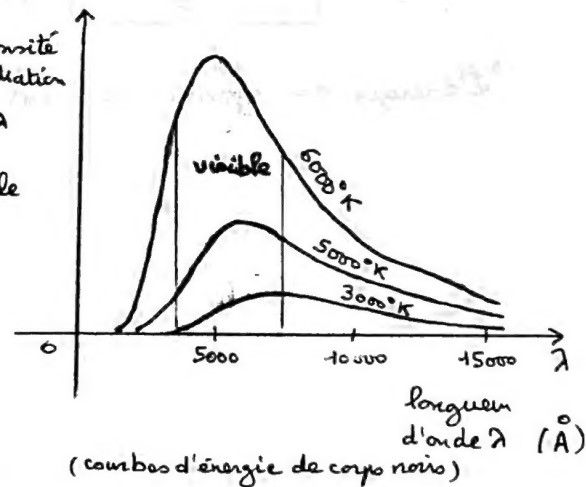
Prolongements : Donner l'allure

de quelques courbes rep. de $\lambda \mapsto I_{\lambda}$ pour des val. diff. de T , et constater

que lorsque T croît :

- l'énergie E émise croît (c'est l'aire sous la courbe)
- le sommet de la courbe se déplace vers la gauche (loi de Wien)

l'étude a été amorcée
 au a), et permet
 d'utiliser
 la limite :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ au prog.
 de Terminale



(réf. TCE Istia 83, 58p193)

a) On étudie la fct $\lambda \mapsto I_{\lambda}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: posons $f(\lambda) = I_{\lambda}$.

$$f'(\lambda) = \frac{ab - 5aT\lambda}{\lambda^7 T} \cdot e^{-\frac{b}{\lambda T}} \text{ s'annule en } \lambda = \frac{b}{5T} \text{ qui correspond bien à un}$$

maximum. Ainsi $\boxed{\lambda_m T = \frac{b}{5}}$ est une constante.

$$b) \quad J_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^n} dx = \underbrace{\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} e^{-\frac{k}{x}} \right]}_{=0} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \cdot \frac{k}{x^2} e^{-\frac{k}{x}} dx \quad (\text{où } n \neq 1)$$

$$J_n = \frac{k}{n-1} J_{n+1}$$

$$\text{d'où } J_{n+1} = \frac{n-1}{k} J_n \Rightarrow \boxed{J_n = \frac{n-2}{k} J_{n-1}} \text{ pour } n \neq 2.$$

* On déduit :

$$J_5 = \frac{3}{k} \cdot J_4 = \frac{3}{k} \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot J_2 \quad \text{et } J_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^2} dx = \left[\frac{1}{k} e^{-\frac{k}{x}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{k}$$

$$\text{donc } J_5 = \frac{6}{k^4}$$

$$* \text{ Enfin: } E = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{a e^{-\frac{b}{\lambda T}}}{\lambda^5} d\lambda = a \cdot \frac{6}{\left(\frac{b}{T}\right)^4} = \frac{6a}{b^4} \cdot T^4$$

$$\boxed{E = \frac{6a}{b^4} \cdot T^4}$$

"L'énergie du rayonnement est donc proportionnelle à T^4 ".

Montrer que pour tout $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

* Récurrence sur n : C'est trivial si $n=0$. Au rang n , posons :

$$P_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$P'_n(x) = e^x - \left(1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \doteq P_{n-1}(x)$$

Par hypothèse récurrente, $P_{n-1}(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, donc P_n sera croissante. Comme $P_n(0) = 0$, on aura :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad P_n(x) \geq 0$$

* On a :
$$e^x \geq 1 + x + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{e^x}{x^n} \geq \underbrace{\frac{1}{x^n} + \dots + \frac{1}{x(n-1)!}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{n!} + \underbrace{\frac{x}{(n+1)!}}_{\rightarrow +\infty}$$

Objectif :

- motiver l'emploi du raisonnement par récurrence
- étudier des fcts où interviennent e^x
- retrouver une limite du cours.
- employer la notion de dérivée, pour obtenir les variations d'une fonction et en déduire une inégalité.

Dans un système d'intérêts simples, 1 F rapporte des intérêts de i F en un an. Ainsi, 1 F rapporte $\frac{i}{n}$ francs en une durée de $\frac{1}{n}$ année. On dit que le "taux nominal i est capitalisé n fois dans l'année" si au bout de $\frac{1}{n}$ année, les intérêts acquis sont ajoutés au capital, le nouveau capital portant des intérêts simples au même taux pendant $\frac{1}{n}$ année, et ainsi de suite pendant 1 an.

1) Mq, si un placement est fait au taux nominal i capitalisé n fois dans l'année, la valeur acquise par 1 F est :

$$u_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

Construire un tableau de valeurs de u_n pour $i=0,12$ et $n=2,3,4,6,120,360$.

2) Etude de $f(x) = \left(1 + \frac{i}{x}\right)^x$

a) Posons $g(x) = \ln f(x)$. Calculer les dérivées $g'(x)$ et $g''(x)$.
Etudier les variations de $g'(x)$, en déduire son signe et le sens de variation de $g(x)$.

b) Donner le tableau de variation de f . Tracer sa courbe représentative. Trouver la tangente à cette courbe en $A(0,1)$

hop dan en Terminale. A admettre

3) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
Quel est son plus petit majorant?

Prolongements :

4) Si $i=0,12$, peut-on trouver le nombre de capitalisations n nécessaire pour que l'intérêt de 1 F en 1 an soit supérieur à 0,125 F ? à 0,13 F ?

5) i étant fixé, à quelles conditions peut-on trouver n pour que, avec ce taux nominal capitalisé n fois dans l'année, l'intérêt de 1 F en un an soit supérieur à j ? (j donné à l'avance)

1)
$$1 \xrightarrow{x(1+\frac{i}{n})} 1+\frac{i}{n} \rightarrow (1+\frac{i}{n})^2 \rightarrow \dots \rightarrow (1+\frac{i}{n})^n$$

$\xleftrightarrow{\frac{1}{n}an} \quad \xleftrightarrow{\frac{1}{n}an}$

2. a) $z(x) = x \ln(1 + \frac{i}{x})$

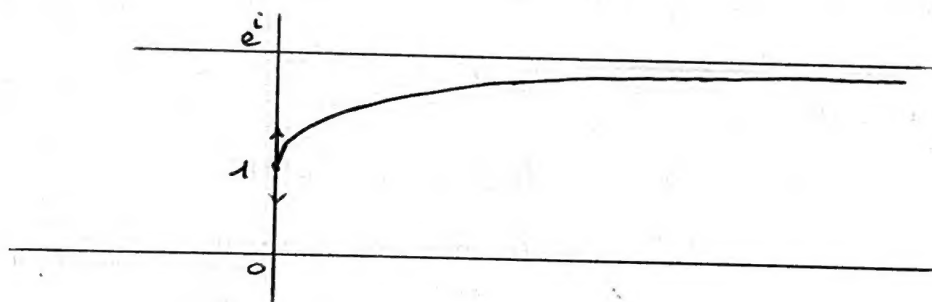
$$z'(x) = \ln(1 + \frac{i}{x}) - \frac{i}{x+i}$$

$$z''(x) = \frac{-i^2}{x(x+i)^2} < 0$$

Ainsi z' décroît sur \mathbb{R}_+^* , et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} z'(x) = 0$, on trouve :

x	0	$+\infty$
z'		+
z	0	$\rightarrow i$

2. b) $f(x) = e^{z(x)}$ sera aussi croissante. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.



x	0	$+\infty$
f	1	$\rightarrow e^i$

* Un développement limité donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$$

(En effet : $\ln f(x) = x \ln(1 + \frac{i}{x}) = x \ln(x+i) - x \ln x$

$$\ln f(x) = x \ln i + x \ln(1 + \frac{x}{i}) - x \ln x$$

$$= x \ln i + x \left(\frac{x}{i} + o(x) \right) - x \ln x \quad (\text{au vois. de } 0)$$

$$= x \ln i - x \ln x + o(x)$$

donc $f(x) = e^{x \ln i - x \ln x + o(x)} = 1 + x \ln i - x \ln x + o(x)$ } aux. Voir p 4

et $\frac{f(x) - 1}{x} = \ln i - \ln x + o(1) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 0)$

3) (u_n) croît et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^i$, donc $\sup u_n = e^i$

Prolongements :

4) Trouver n tq $(1 + \frac{i}{n})^n - 1 \geq 0,125$

$$\text{ie } f(n) = (1 + \frac{i}{n})^n \geq 1,125$$

C'est possible : $1,125 < \sup u_n = e^i = e^{0,12} \approx 1,1274$

Il n'est par contre pas possible d'obtenir $f(n) \geq 1,13$.

$$5) f(n) - 1 \geq j \Leftrightarrow f(n) \geq 1+j$$

La condition cherchée est $1+j < e^i$, ie $j < e^i - 1$.

NB : $e^i - 1$ s'appelle le "taux différentiel du taux i ". Il

apparaît comme le taux maximum (calculé sur 1 an) pouvant être approché en augmentant le nombre n de capitalisations dans l'année au taux nominal i .

On notera que : $i \leq e^i - 1$

et que les 2 situations sont équivalentes :

- taux nominal capitalisé une infinité de fois dans l'année
- taux $e^i - 1$ sur l'année (intérêts simples)

Objectifs : - Mettre en œuvre les fcts \ln et \exp . dans un domaine appartenant à l'économie

- Les prolongements permettent de mieux comprendre le sens de ce travail.

Contexte : - Terminale C

- Dans les prog. du 17 mai 90, Bon 20, il n'y a plus d'étude des dév. limites ^{sauf à l'ordre 1} la question de la lgte en $A(0,1)$ est utilisée. Elle est difficile. On la ré-écrit avec $\pi E(x)$ à la place de $o(x)$...

Remarque: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = +\infty$ est montré, p2, en substituant un développement asymptotique dans l'échelle $(x^\alpha \ln^\beta x)_{\alpha, \beta}$ dans un développement limité. On obtient alors un dével. asympt. dans l'échelle $(x^\alpha \ln^\beta x)_{\alpha, \beta}$, à priori, et non un dével. limité (cf Ramis III.5.2.7)

Retournons à ce calcul p2 :

$$\begin{cases} f(x) = e^{x \ln i - x \ln x + o(x)} \\ e^h = 1 + h + o(h) \end{cases}$$

entraînent :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x \ln i - x \ln x + o(x)) + \underbrace{o(x \ln i - x \ln x + o(x))}_{o(x) + o(x \ln x) + \underbrace{o(o(x))}_{= o(x)}} \\ &= 1 + x \ln i - x \ln x + o(x) + o(x \ln x) \\ &= 1 + x \ln i - x \ln x + o(x \ln x) \end{aligned}$$

et alors $\frac{f(x)-1}{x} = \ln i - \ln x + o(\ln x)$ ne permet pas de conclure !

Il faut un dével. limité de e^h à l'ordre 2 :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

d'où :

$$f(x) = 1 + (x \ln i - x \ln x + o(x)) + \frac{1}{2} (x \ln i - x \ln x + o(x))^2 + o(h^2)$$

$$\begin{aligned} \text{ici } o(h^2) &= o(x^2 \ln^2 i + x^2 \ln^2 x - 2x^2 \ln i \ln x + o(x)) \\ &= o(x^2 \ln^2 x) - o(x^2 \ln x) + o(x) = o(x) \end{aligned}$$

donc :

$$f(x) = 1 + x \ln i - x \ln x + \frac{1}{2} (x^2 \ln^2 i + x^2 \ln^2 x - 2x^2 \ln i \ln x) + o(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-1}{x} &= \ln i - \ln x + \underbrace{\frac{1}{2} (x \ln^2 i + x \ln^2 x - 2x \ln i \ln x)}_{\rightarrow 0 \text{ (} x \rightarrow 0 \text{)}} + o(1) \\ &\quad \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

et l'on obtient bien : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = +\infty$.

CQFD